ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN BÁ NHIỆM

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ MA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN BÁ NHIỆM

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ MA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số: **8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên, 2020

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Không gian vectơ 3

1.1.1 Khái niệm không gian vectơ 3

1.1.2 Không gian con và hệ sinh 5

1.1.3 Cơ sở của không gian hữu hạn chiều 6

1.2 Ma trận 7

1.2.1 Khái niệm ma trận và các phép toán 7

1.2.2 Định thức 9

1.3 Giá trị riêng 9

1.3.1 Khái niệm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận 9

2 Khái niệm và một số tính chất của ma phương **11**

2.1 Khái niệm ma phương 11

2.2 Cấu trúc không gian vectơ trên tập các ma phương 14

2.2.1 Một số tính chất cơ bản của ma phương 14

2.2.2 Cấu trúc không gian vectơ 16

2.3 Tích vô hướng 20

2.4 Giá trị riêng của ma phương 23

3 Một số phương pháp xây dựng ma phương **26**

3.1 Phương pháp Hindu 26

3.2 Phương pháp của Bachet de Méziriac 28

3.3 Phương pháp của Phillipe de la Hire 28

3.4 Phương pháp bước đồng bộ 29

Kết luận **35**

Tài liệu tham khảo **36**

Lời cảm ơn

Trong quá trình làm luận văn, em nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Ngô Văn Định - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Em xin cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Xin trân trọng cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở trường THCS Đông Phương, Kiến Thụy, Hải Phòng đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để em học tập và nghiên cứu.

Lời cuối cùng, em muốn dành để tri ân đến bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để bản thân tôi hoàn thành công việc học tập của mình.

Mở đầu

Trong toán học, một *ma phương* (còn gọi là *ma trận kỳ ảo* hoặc *hình vuông ma thuật*) bậc n là cách sắp xếp n^2 số thành một hình vuông gồm n hàng, n cột sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và trên hai đường chéo là bằng một hằng số. Hằng số này được gọi là *hằng số ma phương*.

Khái niệm ma phương xuất hiện lần đầu tiên trong lịch sử Trung Hoa cổ đại. Truyền thuyết kể rằng trong một trận lụt lớn thời Trung Hoa cổ đại (thời gian cụ thể chưa rõ ràng, có tài liệu ghi khoảng năm 650 trước công nguyên, có tài liệu ghi khoảng năm 2200 trước công nguyên ...), người ta thấy trên mai một con rùa có một bảng số hình vuông 3 hàng, 3 cột:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Điều đặc biệt của bảng số này là tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng 15.

Thông thường người ta xét các ma phương cấp n với các n^2 phần tử là các số tự nhiên từ 1 đến n. Ma phương thông thường này tồn tại với mọi $n \geq 1$ trừ trường hợp $n = 2$ (trường hợp $n = 1$ là trường hợp tầm thường). Tuy nhiên, có một số khái niệm ma phương khác cũng được định nghĩa dựa trên một số tính chất của bảng số.

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu và trình bày lại một số khái niệm và tính chất của ma phương.

Tập các ma phương bậc n rõ ràng là một tập con của tập các ma trận vuông cấp n. Hơn nữa, cũng dễ dàng thấy rằng tập các ma phương cấp n đóng kín với các phép toán cộng ma trận và nhân ma trận với một số. Điều này kéo theo tập các ma phương cấp n kế thừa cấu trúc không gian vectơ của không gian vectơ các ma trận vuông cấp n. Mục tiêu đầu tiên của luận văn là làm rõ cấu trúc

không gian vectơ trên tập các ma phương, xác định số chiều của không gian này. Ngoài ra, trình bày một số tính chất về hàng, về cột của các ma phương.

Mục tiêu thứ hai của luận văn là trình bày một số phương pháp xây dựng các ma phương. Chưa có một phương pháp cụ thể nào có thể xây dựng được tất cả các ma phương. Mỗi phương pháp có đặc điểm riêng. Trong luận văn này, chúng tôi mới chỉ dừng lại ở việc giới thiệu một vài phương pháp thông thường để xây dựng một số ma phương.

Nội dung chính của luận văn được chia thành ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị. Ở đây, chúng tôi chỉ trình bày sơ lược lại một số kiến thức về ma trận, không gian vectơ để phục vụ cho việc làm rõ cấu trúc không gian vectơ của tập các ma phương. Chương 2 tập trung làm rõ cấu trúc không gian vectơ, chứng minh tập các ma phương cấp n là một không gian vectơ, không gian này có không gian vectơ con là tập các ma phương cấp n có hằng số ma phương bằng 0 (gọi là các *ma phương không*); xác định số chiều của hai không gian vectơ này. Phần cuối của chương trình bày một số tính chất về tích vô hướng của các hàng, các cột và giá trị riêng của ma phương. Chương 3 giới thiệu bốn phương pháp xây dựng ma phương: phương pháp Hindu; phương pháp của Bachet de Méziriac; phương pháp của Phillipe de la Hire; phương pháp bước đồng bộ.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Không gian vectơ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một cách sơ lược một số kiến thức chuẩn bị về không gian vectơ, ma trận, hệ phương trình tuyến tính. Nội dung của chương được tham khảo tài liệu [1].

1.1.1 Khái niệm không gian vectơ

Định nghĩa 1.1.1. Xét tập $\mathbf{V}$ khác rỗng mà mỗi phần tử ta quy ước gọi là một vectơ và trường số thực $\mathbb{R}$. Giả sử trong $\mathbf{V}$ ta định nghĩa được hai phép toán: phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực.

Phép cộng hai vectơ là một luật hợp thành trong trên $\mathbf{V}$ cho phép tạo ra từ một cặp vectơ $x, y \in \mathbf{V}$ một vectơ duy nhất gọi là tổng của chúng, kí hiệu là $x + y$.

Phép nhân một vectơ với một số, còn gọi là phép nhân với vô hướng, là một luật hợp thành ngoài trên trên $\mathbf{V}$ cho phép tạo ra từ một vectơ $x \in \mathbf{V}$ và một số thực $k \in \mathbb{R}$ một vectơ duy nhất gọi là tích của chúng, kí hiệu là kx.

Nếu 10 điều kiện sau được thảo mãn với mọi $x, y, z \in \mathbf{V}$ và mọi $k, i \in \mathbb{R}$ thì tập $\mathbf{V}$ được gọi là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$:

(1) Nếu x và $y \in \mathbf{V}$ thì $x + y \in \mathbf{V}$;

(2) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbf{V}$;

(3) $x + (y + z) = (x + y) = z, \forall x, y, z \in \mathbf{V}$;

(4) Tồn tại vectơ $\theta \in \mathbf{V}$ sao cho

$$\theta + x = x + \theta = x, \forall x \in \mathbf{V};$$

(5) Với mỗi $x \in \mathbf{V}$ tồn tại vectơ $-x \in \mathbf{V}$ sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = \theta;$$

(6) Nếu $k \in \mathbb{R}$ và $x \in \mathbf{V}$ thì $kx \in \mathbf{V}$;

(7) $k(x + y) = kx + ky$;

(8) $(k + l)x = kx + lx$;

(9) $k(lx) = (kl)x$;

(10) $1.x = x$.

Ví dụ 1.1.2. Xét $\mathbb{R}^n$ là tập mà mỗi phần tử là một bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_n)$, còn gọi là một vectơ n thành phần. Xét

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ và } y = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Phép cộng vectơ và phép nhân với vô hướng định nghĩa như sau

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$kx = (kx_1, kx_2, ..., kx_n), k \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra $x = y$ khi và chỉ khi $x_i = y_i, \forall i$. Với các phép toán trên, dễ dàng kiểm tra được rằng $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ (thực).

Dưới đây là một số tính chất đơn giản của không gian vectơ:

Mệnh đề 1.1.3. (a) *Phần tử trung hòa θ là duy nhất, còn gọi là vectơ không.*

(b) *Phần tử đối xứng $-x$ của bất kì vectơ x nào thuộc $\boldsymbol{V}$ cũng là duy nhất.*

(c) *$\forall x \in \boldsymbol{V}$ ta đều có $0x = \theta$.*

(d) *$\forall x \in \boldsymbol{V}$ ta đều có $-x = (-1)x$.*

(e) *$\forall k \in \mathbb{R}$ ta đều có $k\theta = \theta$.*

(f) *Với $x \in \boldsymbol{V}$, và $k \in \mathbb{R}$ ta có: nếu $kx = \theta$ thì hoặc $k = 0$ hoặc $x = \theta$.*

1.1.2 Không gian con và hệ sinh

Định nghĩa 1.1.4. Cho **V** là một không gian vectơ, **W** là một tâp con của **V**. Nếu với hai phép toán trên **V**, **W** cũng là một không gian vectơ thì **W** được gọi là một không gian con của **V**.

Như vậy muốn chứng tỏ $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ là một không gian con của **V** ta phải chứng minh rằng bản thân **W** với hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số đã định nghĩa trong **V**, cũng thỏa mãn 10 tiên đề của không gian vectơ. Định lý sau giúp cho việc chứng mình $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ là một không gian con của **V** đơn giản hơn.

Định lý 1.1.5. *Cho* $\boldsymbol{V}$ *là một không gian vectơ,* $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \neq \emptyset$*. Để* $\boldsymbol{W}$ *là không gian con của* $\boldsymbol{V}$ *điều kiện cần và đủ là hai tính chất sau được thỏa mãn:*

(a) Nếu u *và* $v \in \boldsymbol{W}$ *thì* $u + v \in \boldsymbol{W}$ *(tức là* $\boldsymbol{W}$ *đóng kín đối với phép cộng vectơ).*

(b) Nếu $k \in \mathbb{R}, u \in \boldsymbol{W}$ *thì* $ku \in \boldsymbol{W}$ *(tức là* $\boldsymbol{W}$ *đóng kín đối với phép nhân vectơ với một số thực).*

Định nghĩa 1.1.6. Cho **V** là một không gian vectơ, **S** là họ vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của **V**. Biểu thức

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \text{ với } c_i \in \mathbb{R},$$

là một vectơ thuộc **V** và được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ **S**, hay cũng có thể nói gọn là tổ hợp tuyến tính của họ **S**. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của **S** được gọi là bao tuyến tính của **S**, ký hiệu $span(\mathbf{S})$.

Định lý 1.1.7. $\boldsymbol{W} = span(\boldsymbol{S})$ *là một không gian con của* $\boldsymbol{V}$*.*

Định nghĩa 1.1.8. Cho **V** là một không gian vectơ, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Nếu $span(\mathbf{S}) = \mathbf{V}$, tức là nếu mọi $x \in \mathbf{V}$ đều có biểu diễn

$$x = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

thì ta nói **S** là một hệ sinh của **V**.